

CORRIGÉ 1

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5 = 3 - t \\ 2 = 2 + 4t \\ 6 = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ 2 = -6 \\ 6 = 4 \end{cases}$$

Donc $A(5; 2; 6) \notin \Delta$

$$\textcircled{2} \text{ Soient } (a, b, t) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} 4 = 3 - t \\ a = 2 + 4t \\ b = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 5 = 3 - t \\ -6 = 2 + 4t \\ 4 = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ -6 = -6 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Donc $A(5; -6; 4) \in \Delta$

$$\textcircled{3} \text{ Le repère étant orthonormé, } AM^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = (3-t-5)^2 + (2+4t-2)^2 + (-2t-6)^2$$

$$AM^2 = (t+2)^2 + 16t^2 + (2t+6)^2 = t^2 + 4t + 4 + 16t^2 + 4t^2 + 24t + 36 = 21t^2 + 28t + 40$$

$$\textcircled{4} \text{ La fonction trinôme } t \rightarrow 21t^2 + 28t + 40 \text{ étant convexe sur } \mathbb{R}, \text{ elle passe par un minimum en } t = -\frac{28}{2 \times 21} = -\frac{2}{3}.$$

Donc le point M de Δ le plus proche du point A a pour coordonnées $(\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$

CORRIGÉ 2 un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(-1; 3; 1)$.

$\textcircled{1} \vec{AB}(2; 1; -3)$ a des coordonnées non proportionnelles à celles de \vec{u} donc (AB) et Δ sont non parallèles, donc sécantes ou non coplanaires. Pour trancher, cherchons leur intersection.

Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = 2 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

M est dans l'intersection des deux droites Δ et (AB) si et seulement si il existe deux nombres réels t et k tels que :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \\ x = 1 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = 2 - 3k \end{cases} \text{ ce qui implique : } \begin{cases} t = -2k \\ -2 - 6k = -1 + k \\ -1 - 2k = 2 - 3k \end{cases} \implies \begin{cases} t = -2k \\ 7k = -1 \\ -1 + \frac{2}{7} = 2 + \frac{3}{7} \end{cases}$$

L'intersection des deux droites est donc vide : elles sont non coplanaires (car non parallèles).

CORRIGÉ 3 $\textcircled{1} \vec{IE} = \vec{IA} + \vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.$

$$\vec{IF} = \vec{IA} + \vec{AF} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}.$$

$$\vec{IG} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DG}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BC}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$= -\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}.$$

$\textcircled{2}$ Il existe deux réels α et β tels que $\vec{IG} = \alpha\vec{IE} + \beta\vec{IF}$

$$\text{soit } -\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC} = -\frac{\alpha}{2}\vec{AB} + \frac{2\alpha}{3}\vec{AC} - \frac{\beta}{2}\vec{AB} + \frac{2\beta}{3}\vec{AD}$$

Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre α et β tels que :

$$-\frac{3}{2} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \text{ et } \frac{2}{3}\alpha = 1 \text{ et } \frac{2}{3}\beta = 1, \text{ soit, } \alpha = \frac{3}{2} \text{ et } \beta = \frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où } \vec{IG} = \frac{3}{2}\vec{IE} + \frac{3}{2}\vec{IF}$$

$\textcircled{3}$ On en déduit que les vecteurs \vec{IE} , \vec{IF} et \vec{IG} sont coplanaires, donc les points I, E, G et F sont coplanaires.